大正四年六月二十一日第三種郵便物認可（毎月一回一日發行）

京都帝國大學經濟學會

經濟論叢

第四十六卷　第六號

昭和十三年六月一日發行

論叢

箱館における缺乏品貿易……經濟學博士　本庄榮治郎

清算貿易制の理論……經濟學博士　谷口吉彦

共同體思想の生的基礎……經濟學博士　石川興二

時論

消費節約の問題……文學博士　高田保馬

研究

ホッブスの租稅論とその周圍……經濟學士　島恭彦

利子率を含む經濟擴張論……經濟學士　飯田藤次

エッヂワースと誤差法則……經濟學士 理學士　馬場吉行

近世絞油業の發達……經濟學士　住谷勇二

說苑

損害率と保險料率との相關關係……經濟學士　佐波宣平

臨時稅法の整理……經濟學博士　汐見三郎

附錄

雜報・外國雜誌論題

本誌第四十六卷總目錄

エッヂワースと誤差法則

馬場吉行

一　はしがき

エッヂワースは統計學を規定して、社會科學の領域に於ける「平均の學問」乃至「集團現象の學問」となし、從つて彼に於ては「統計的研究」―集團的研究がその中心課題をなした。そしてこの場合平均と偏差分布を考察するに際し、彼は數學的確率論を用ひて先づ誤差法則をたて、ついでこれを具體的な問題に適用したのである。

私は前稿[1]に於て、彼が誤差法則を如何に觀じたか、又更にその根基をなす誤差を如何に解したかについて考察を試みた。元來誤差法則は、同一物體を多數回觀測するときに得られる、測定値系列の分布を問題とするもので、無限に多數回觀測した場合に得らるべき、測定値の度數分布を數學的に表現するものである。觀測法に於ける誤差法則の意義は右の如くであるが、これを同種個體の多數個觀察の場合に準用し得るかどうか、準用し得るとすればその理論的根據は何處に求め得るか。卽ち集團的研究に於ける誤差法則は、果してこれを觀測法に於けるものと一括して考察し得るかが問題である。更に吾々の誤差法則は現實の度數分布をしめすグラフに、直接に適當な數學的函數形を有する曲線をあてはめんとするものではなく、一應現實の度數分布のグラフから離れて、誤差法則の根基をなす誤差の性質をたづね、誤差に關する假說をたてゝ、これから數學的・形式的に理想的誤差法則を

1) 拙稿「エッヂワースと誤差の問題」本誌、第四十五卷、第五號所載。

導かんとする。か丶る誤差の假說に關してはガウス、ハーシェル流とラプラス、ケトレー流とが對立するが、エッヂワースに於ては後者を採用した。即ち「獨立原因の假說」又は「基本誤差の假說」といはれるもので、「觀測法」に於ける誤差は、これを多數の獨立原因によつて生ずる小さな誤差の集りと見做し、又「集團的研究」に於ける同種個體の多數個の觀測値の相互間の差違は、これを當該觀測値に影響を及ぼす多數の獨立原因の値に、多少互に差違あるが故であるとして說明した。かくの如く、エッヂワースの誤差法則は獨立原因の假說を基礎とし、これより數學的に導いた一の函數形を言ふのであるが、彼の誤差法則は所謂ガウスの「正規法則」をその第一次近似として含む、更に一般的のものである。

私は以下彼が一九〇五年に發表した論文 'The Law of Error (Cambridge Philosophical Transaction, Vol. XX) に據り、彼の誤差法則の出發點たる獨立原因の假說系が、如何に構成されてゐるか、又か丶る假說系から如何なる數學的取扱によつて、誤差法則が導かれたかを考察したい。勿論彼はこれを單なる數學上の問題として考察したのでなく、觀測法・統計的研究法にその適用地盤を期待した。從つて彼の理論に於ては、各所に現實に即した諸點を有するであらう。私はかうした點に留意しつ丶彼の理論の一部分を追跡したいと思ふ。

二　誤差法則の意義

エッヂワースはこの論文に於ては、專ら誤差法則の數學的解析、即ち一定の條件を滿たす度數分布の數學的表現を取扱つてゐる。そこで先づ彼の誤差法則の定義をみるに、[2]「誤差法則とは、多數の變量即ち原素に依存する

2) Edgeworth, The Law of Error (Cambridge Philosophical Transaction, Vol. XX), 1905. p. 38.

一量が取る種々なる値の、終局に於ける度數の近似的表現である。但し日常の經驗に於て、適當に滿たされてゐると思はれる諸條件を與へたものとする。」

今この定義を分解すると、(一)先づ多數の原素(elements)の値から複合量(compounds)の値が、ある一定の結合の仕方により與へられるものとする。(複合量の一の値を得ることを一回の觀測(observation)と名付ける。)(二)次に諸原素が各々ある一定の仕方でその値を變ずるときは、複合量もこれに應じてその値を變ずる。(觀測のたび毎に複合量の觀測値を異にする。)(三)もしかゝる觀測値が多數に得られたとするならば、その度數分布は如何なる形を取るか。(四)更にかゝる觀測値が限りなく多く與へられたとするならば、その度數分布は終局に於て(in the long run)如何なる數學的函數表現を有するか。特にかゝる理想的度數分布曲線を、簡單な函數形を用ひて近似的に(approximately)表現し得るであらうか。この終局的度數分布の近似的函數表現が吾々の誤差法則に外ならない。(五)但しかゝる數學的解析をなすには、それに充分な諸條件が、原素の變動に關し又諸原素の結合に關して與へられるを要する。(六)又無限個の取扱、曲線の近似の意味が明確に規定されるを要することゝなる。

ついで彼はこの理論の發展を述べて曰く、[3]「かくの如く理解された誤差法則の第一次近似(the first approximation)はラプラス(Laplace)が彼の最小二乘法と關聯して與へた。第二次近似は同樣な方針に從ひポワッソン(Poisson)が研究した。第一次近似の他の一方法はモルガン・クロフトン(Morgan Crofton)教授により與へられ、私がこれを第二次近似に擴張した。」そこで彼はこの論文に於て展開せんとする所を述べて曰く、[4]「これから試みんとするのは既に見出された結果を確立し、更に新しい結果—即ち第三次、第四次、更に一般に第t次近似—を一部分は新し

3) Edgeworth, ibid, p. 38.
4) Edgeworth, ibid, p. 38.

い方法により、又一部分はラプラス及びクロフトン教授によつて創始された、方法の變形や擴張により見出さうとする。」

さて彼はこの論文を便宜上二部に分かち、第一部[5]では典型的な場合 (typical case) を、第二部[6]では更に一般的な場合を取扱つてゐる。こゝに典型的な場合といふのは、「原素も複合量もたゞ一方向にのみその値を變じ、原素と結合量との關係が特に簡單な」[7]場合を取り出したのであつて、必ずしも「最も簡單な場合でもなく、又最も一般的な場合でもない。」[8]即ち數學的解析の便宜上又必要上、典型的な場合を基準としたのである。

「そこで第一部の主題たる典型的な場合は次の屬性によつて定義される。第一に、誤差法則が完全に實現されるために滿たされるべき必須な諸條件、そして第二に、説明の便宜上單に導入され、後ほど取除かれるべき諸限定がこれである。」[9]かくして彼は以下十一個の假定を設ける。

「一、原素は種々の値を任意に取る。

二、各原素の取る値は終局に於て、單一な定まつた度數曲線即ち度數軌跡によつて表すことの出來る、比例的度數を以て繰返される。

三、複合量の種々の値に參加する同一原素の各々の値の組は、互ひに獨立な變化値よりなる。

四、複合量の同一の値に參加する種々の原素の値の組は、互ひに獨立な變化値よりなる。

五、諸原素が集合する結合方法は最も簡單な方法即ち加法である。

六、各々の原素は單一の同一方向にのみ變化する。

5) Edgeworth, ibid, pp. 36-65.
6) Edgeworth, ibid, pp. 113-141.
7) Edgeworth, ibid, p. 36.
8) Edgeworth, ibid, p. 38.
9) Edgeworth, ibid, p. 38.

七、各原素の度數軌跡に對し、その重心と兩限界値との間の距離は無限大ではない。茲に重心(centre of gravity)とは原素の値を測つてゐる軸上の一點で、もしも原素の取る値に應ずるすべての點に、結局その値の占める度數に比例して質點 (a particle of mass) を置いたとしたときに、重心となるべき點である。又限界値 (extremities) とは原素が結局に於て取る最大値及び最小値を示す。

八、各原素の度數軌跡に對し、その重心と兩限界値との間の距離は無限小ではない。

九、原素の數は結局定義される一定の諸量に關して大きい。

十、種々の原素に對する度數軌跡は、たとへ一般的には一致しないとしても近似的には相等しい。即ち任意の原素に對しその重心からの偏差の羃平均 (Mean powers of deviation) ―第一羃、第二羃、第三羃以下適當な第 t 羃まで―が、他の原素に對する對應羃と近似的に同じといふ意味に於て。

十一、任意の原素が終局に於て取る諸値は、すべて單一の同じ定差 (finite difference) の倍數である。[10]」

以上十一個の命題が典型的な場合の假說系として與へられる。先づ一囘の觀測に於て、複合量の値が諸原素の値から加法により定められる。これが第五の假定である。第六は各原素の取る値が一方向にのみ起ることを示し、第二は終局に於てこれらの値が一の定まつた度數曲線を有つこと、第七及第八はかゝる値の算術平均(重心)と限界値との偏差に關するものである。第十は各原素の度數曲線が略々相等しいことを示すために、重心の周りの偏差の羃平均を略々等しいと假定する。

次にこれを彼に從ひ記號で表はし、この假說系の有つ意味につき若干の考察を加へやう。

10) Edgeworth, ibid, pp. 38–39.

「今複合量の第 p 番の値—第 p 番観測値と呼ばう—を $A+{}_px$ とする。こゝに ${}_px$ は終局に於て、複合量の取る諸値の組に屬する重心から測つたのであり、A はある一定の原點からその重心までの距離である。[11]」今原素の個數を m とすると、第五の假說により $A+{}_px=(a_1+{}_p\xi_1)+(a_2+{}_p\xi_2)+\cdots\cdots+(a_m+{}_p\xi_m)$ となる。「玆に $a_q+{}_p\xi_q$ は第 q 番原素の第 p 番觀測値への參加値で、${}_p\xi_q$ は第 q 番原素の終局に於て占める値の組に屬する重心から測つたものである。又 a_1、a_2、a_3、$\ldots a_m$ の各々は x の原點と同じ原點から測つたものとしてよい。さうすると $A=\sum_{q=1}^{q=m}a_q$ 及び ${}_px=\sum_{q=1}^{q=m}{}_p\xi_q$ となる。同一原素により種々の觀測値へ參加された値、即ち ${}_1\xi_q$、${}_2\xi_q\ldots{}_p\xi_q\ldots$ は互ひに獨立に任意の値を取ると假定した。又種々の原素により同一の觀測値へ參加された値も相互に獨立に任意の値を取るとした。原素の數 m は $\lambda_0,\ \lambda_1/m^{\frac{1}{2}},\ \lambda_2/m,\ \lambda_3/m^{\frac{3}{2}}\ldots$ が遞減數列を作りうるほどに大きいとする。但し λ_0、$\lambda_1\ldots$ は結局定まる一原素の羃平均の諸函數である。任意の第 q 番原素のとる値は、x 軸上にある互に定差 Δx の間隔にある諸點を占める。……第 q 番原素の取る種々の値の度數は度數軌跡 $y_q=\phi_q(\xi)$ により表はされる。但しその原素の任意の値、例へば ξ_q' のとる相對的度數は終局に於ては $\Delta x\phi_q(\xi')$ に等しいといふ意味である。從つて $[S\phi_q(\xi)\Delta\xi]$[12] は、もしその和を原素の一方の端の値から他方のまでとるとすれば、1 となる。そして重心からの偏差の t 乘平均は $[S\xi^t\phi_q(\xi)\Delta\xi]$ として表される。但し重心を原點にとり、括弧はその和が原素の一方の端値から他方のまでに及ぶとする。假定により今の形は近似的に、他の第 p 番原素に對する偏差の t 乘平均 $[S\xi^t\phi_p(\xi)\Delta\xi]$ に等しいことゝなる。[13]」

以上の如くに彼は説明するが、後に誤差法則の出し方を考察する場合に知られる如く、${}_px=\sum_{q=1}^{q=m}{}_p\xi_q$ のみが基

11) Edgeworth, ibid, p. 39.
12) S は加法の記號、彼に於ては S は同一の原素の取る諸値についての和に用ひ、Σ は種々の原素の取る値についての和に用ひる。Edgeworth, ibid, p. 40, (Footnote).
13) Edgeworth, ibid, p. 40.

本で、他は各項の意味を說明し、又は數學的解析の遂行上附加される諸限定にすぎない。各原素の度數曲線が略々相等しいことを、$[S\xi^{r}\varphi_{p}(\xi)\Delta\xi]$ が p に無關係に略々一定であることを以て表はしてゐるが、かうした曲線の近似及びその度合、量の近似及びその度合については後に考察することゝする。なほ便宜上右の加法を積分形になほし、$[S\xi^{r}\varphi_{p}(\xi)\Delta\xi]=\int_{-\infty}^{+\infty}\xi^{r}\varphi_{p}d\xi$ とすることが出來る。

「以上を基礎として、問題は $y_0+(y_1-y_0)+(y_2-y_1)+\text{etc.}$ なる形に置き得る y を x の項で表現することである。但し $y_0\Delta x$ は複合量の取るある x の値の相對的度數に對し第一次近似をなし、$y_1\Delta x$ は第二次近似をなし、以下同樣とする。又第一次補正 y_1-y_0、第二次補正 y_2-y_1 等は大いさに關し遞減的な數列を作る如くする。」[14] 即ち x の度數函數 y を無限級數に展開し、最初の數項をもつてこれを近似的に代表せしめんとするのであり、その各項は遞減的なるやうにせんとするのである。

さて右の典型的な場合に、彼は四通りの方法にて誤差法則を導いてゐる。[15] 第一法は即ち彼が當論文に於てはじめて發表したものであり、第二法はモルガン・クロフトン教授の方法を更に一般的に展開したもので、第三法はラプラス及びポワッソンの方法、第四法は所謂誤差法則の reproducivity を用ひて證明したものである。そして第一部の最後の節ではかゝる結論を簡單な場合について驗證してゐる。第二部に於ては、典型的な場合の研究を擴張・整備してゐるが、これらはみな第一部に於て行つた數學的解析の一般化に外ならない。即ちこゝに於ては、「數個の自由度を有し、複合量は原素の一次式以外の函數でもよく、そして必須な條件のみが保持されて、その他の、簡單化のための條件は取り除かれるのである。[16]」

14) Edgeworth, ibid, p. 40.
15) Edgeworth, ibid, p. 40.
16) Edgeworth, ibid, p. 37.

三　誤差法則の導き方

エッヂワースはこの論文に於ては、誤差法則の數學的理論に終始し、その取扱つてゐる事項は極めて多岐にわたり、詳細を極めてゐる。從つて今その豊富なる内容を全面的に紹介することは、よく私のなし得る所ではない。そこで私は特に第一部即ち典型的な場合につき、彼の創見になる第一方法を考察してみよう。實にこの方法は彼のこの論文の主體をなしてゐて、こゝに於ては曲線の近似及びその度合、量の近似及びその度合の意義の考究がなされて居る。特に誤差法則を統計學上の問題に適用せんとする吾々に於て、かゝる近似の意義を理解することは極めて重要なことゝ思はれる。

エッヂワースは彼の第一法を說くにあたり、先づ曲線の近似の意味について定義を與へてゐる。[17] 即ち彼は與へられた曲線即ち現實軌跡 (actual locus) と、これに近似な曲線即ち代表軌跡 (representative locus) との間の關聯について特別な規準を與へる。即ち後者の軌跡の重心からの偏差の累乎均 (Mean powers of deviations) が第一次、第二次…第 t 次まで順次に前者のそれに近似的に相等しいときに、後者は前者に近似な曲線であるとする。こゝに t は原素の個數 m に比較して適當に小であるとする。

さてこの近似の定義に於て、與へられた現實軌跡とは何をさすか、これは經驗的に與へられた度數曲線ではない。即ち構成的度數分布曲線や解析的度數分布曲線は、今こゝに問題とする現實軌跡ではあり得ない。單に前述十一個の假說を滿足する假定的な集團の度數分布曲線を意味するに過ぎない。このことは誤差法則即ち現實曲線

17) Edgeworth, ibid, p. 40.

の近似的度數分布函數を、實際の度數分布に適用するに際して重要である。卽ち經驗的度數軌跡と先驗的度數軌跡との結びつきが問題であり、經驗的軌跡はこれを一應先驗的度數軌跡とみなして、はじめてその度數分布の近似的表現卽ち誤差法則を得るのである。

次に與へられた現實軌跡は、簡單な代表軌跡を有する如きものであるを要する。卽ち現實軌跡は充分に數學的に近似な函數形を有するを要し、從つて逆に前述十一個の前提は、數學的演繹に堪へる如く構成せられてゐるを必要とする。又この場合の現實軌跡は、完全に數學的にその形がきめ得らるべきものではあるが、今吾々はこれを求めるのではなく、なるべく數學的に簡單な函數によつてこれを代表せんとする。卽ち吾々に於ては近似的數學式を要求してゐるのであり、從つて近似の定義が定められねばならないのである。

エッヂワースの取つた曲線の近似の規準は所謂ピアーソン (K. Pearson) のモーメント (Moment) 法[18]である。卽ち兩曲線につきその値の重心(算術平均)から各値までの偏差の冪平均—重心の周りのモーメント—が第一次、第二次、第三次と適當なところまで略ゝ相等しいときに、兩曲線は互ひに近似するといふ。さてこれについては彼はその採用理由を次の如くに說明する。[19]「この近似の規準は次の如くに辯ずることが出來る。卽ち現實軌跡と代表軌跡との間の對應が各局部に於てよりも、むしろ全體に於て期待されるのであるから、偏差の冪平均はすべての觀測値の總括として適當な比較の形狀を與へる。すでにピアーソン及びボーレーにより代表曲線が數個の—卽ち四つか五つの—冪平均を現實曲線のそれと一致させる場合には、それは又もつとよく知られた近似の標準、卽ち"Misfit"[20]—現實曲線と代表曲線との對應縱座標の間の差の和—が小さかるべしといふのを滿足するのである。」

18) Rietz, H. L., Handbook of Mathematical statistics, 1924, p. 68.
19) Edgeworth, ibid, pp. 40–41.
20) Edgeworth, The Generalized Law of Error, ot Law of Great Numbers, (Journal of the Royal Statistical Society, Vol. 69), 1906, p. 520 以下の例參照。

卽ち曲線の近似の規準として、モーメント法と“Misfit”法とが取られるのであるが、彼は前者による。今これが吾々の統計解析法に於て如何なる意義を有するかを見るに、兩系列の度數分布につき、四つの測度[21]—算術平均・標準偏差・非對稱度・尖峰性—が略々相等しいとき、兩者の度數分布が近似的に等しいとみることに外ならない。

右に於ては兩曲線の近似をみるに、その重心の周りのモーメントなる量の近似を以てした。そこで量の近似及近似度が問題とされる。これにはその量を大いさの位數[22](Order of Magnitude) に從ひ分離し、第一項のみを取つたものを第一次近似とし、第二項までを取つたものを第二次近似とし、以下同樣にして近似度を高めるのである。

次に誤差法則の導き方の方針について考察しよう。既に前節の終りに於て述べたやうに、現實曲線 y の代表曲線を見出すには、y を分解して $y=y_0+(y_1-y_0)+(y_2-y_1)+(y_3-y_2)+\text{etc.}$ の如くする。こゝに各項は一の標準に從ひ順次に排列されたものとする。この分離の標準は、既に述べた曲線の近似度の定義に從ふのである。今 y の重心の周りの第 t 次モーメントを $x^{(t)}$ で表はすと、$x^{(t)}=[Sx^ty\Delta x]=\int_{-\infty}^{+\infty}x^tydx$、依つて次の恒等式系を得る。

$$[\mathrm{I}]\qquad x^{(1)}=\int_{-\infty}^{+\infty}xydx\ ,\quad x^{(2)}=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2ydx\ ,\quad x^{(3)}=\int_{-\infty}^{+\infty}x^3ydx\ ,\ \text{etc.}$$

この [I] に於ては、現實軌跡 y を與へると $x^{(1)}$、$x^{(2)}$、$x^{(3)}$、等が確定することを表示する。逆に $x^{(1)}$、$x^{(2)}$、$x^{(3)}$ 等が與へられたものとし、y を未知の函數とすると現實軌跡 y こそ、[I] の一つの解でなければならない。かかる考へ方から吾々は y の近似的解 y_0、y_1 等を求めよう。それには量の近似について述べたやうに、$x^{(t)}$ を大いさの位數に從つて分離し、$x^{(t)}=x_0^{(t)}+(x_1^{(t)}-x_0^{(t)})+(x_2^{(t)}-x_1^{(t)})+\text{etc.}$ となし得たとするならば、

21) 森田優三、統計概論、89頁。
22) Order of Magnitude については Appendix (p. 131) に詳しい。

$x^{(t)}=\int_{-\infty}^{+\infty}x^t y\,dx$ を書きかへて、

$$x_0^{(t)}+(x_1^{(t)}-x_0^{(t)})+(x_2^{(t)}-x_1^{(t)})+\text{etc.}=\int_{-\infty}^{+\infty}x^t\{y_0+(y_1-y_0)+(y_2-y_1)+\text{etc.}\}dx,\quad [t=1,2,3,\cdots]$$

となし得る。そこで

$$[\mathrm{I}'] \qquad x_0^{(1)}=\int_{-\infty}^{+\infty}xy_0\,dx\;,\quad x_0^{(2)}=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2y_0\,dx\;,\quad x_0^{(3)}=\int_{-\infty}^{+\infty}x^3y_0\,dx\;,\ \text{etc.}$$

に於て ${}^{(t)}x_0$ を與へて y_0 を未知函數とみると、 y_0 は y の第一次近似を與へるであらう。又 ${}^{(t)}x$ を第二次近似 ${}^{(t)}x_1$ まで取つて

$$[\mathrm{I}''] \qquad x_1^{(1)}=\int_{-\infty}^{+\infty}xy_1\,dx\;,\quad x_1^{(2)}=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2y_1\,dx\;,\quad x_1^{(3)}=\int_{-\infty}^{+\infty}x^3y_1\,dx\;,\ \text{etc.}$$

なる方程式の解 y_1 を得たならば、これは y の第二次近似を與へるであらう。更にこのやうにして y の一般的な高次近似即ち吾々の誤差法則が導かれることとなる。

以上の準備の下に、實際に誤差法則の出る徑路を述べよう。これは二大別され、先づ ${}^{(t)}x$ の大いさの位數による分離の方法と、誤差函數を見出す方法とになる。先づ ${}^{(t)}x$ を分割するには、第 p 番觀測値 ${}_px=x$ の冪をその原素の參加値 ξ_1、ξ_2、…ξ_m で表はすために、次の如き $x^m/m!$ の母函數 (Generating function) を用ひる。

$$e^{\theta x}=1+\frac{x}{1}\theta+\frac{x^2}{2!}\theta^2+\frac{x^3}{3!}\theta^3+\cdots\cdots\cdots$$

さて、 $x=\xi_1+\xi_2+\xi_3+\cdots+\xi_m$ であるから、 $e^{\theta x}=e^{\theta(\xi_1+\xi_2+\xi_3+\cdots+\xi_m)}=e^{\theta\xi_1}\times e^{\theta\xi_2}\times\cdots\times e^{\theta\xi_m}$ となり、從つて

$$\left(1+\theta\frac{x}{1}+\theta^2\frac{x^2}{2!}+\theta^3\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)=\left(1+\theta\frac{\xi_1}{1}+\theta^2\frac{\xi_1^2}{2!}+\cdots\right)\left(1+\theta\xi_2+\cdots\right)\cdots\left(1+\theta\xi_m+\cdots\right)$$

かゝる恒等式は觀測の度每に得られる。今無限に多くの觀測 (an infinitely large number of observations) について、かゝる恒等式を作りこれを(算術)平均する。そして前述の如く $({}_px)^t$ 即ち x^t の平均を $x^{(t)}$ と書き、又 $({}_p\xi_q)^t$ 即ち ξ_q^t の平均を $\xi_q^{(t)}$ で表はすこととすれば

$$1+\theta x^{(1)}+\frac{1}{2!}\theta^2x^{(2)}+\cdots\equiv\text{Mean of }\left(1+\theta\xi_1+\frac{1}{2!}\theta^2\xi_1^2+\cdots\right)\left(1+\theta\xi_2+\cdots\right)\cdots$$

次に右邊の形を變形するにあたり、次の假定を設ける。即ち「二つの獨立な統計的量 (statistical quantities) の積の平均は―もしその兩組が不變の條件の下に、無限に多くの度數を以て反復されると假定するときは―それら各々の平均の積に等しい」[23]とする。今これを用ひると

$$1+\theta x^{(1)}+\frac{1}{2!}\theta^2x^{(2)}+\cdots\equiv\text{Mean of }\left(1+\theta\xi_1{}^1+\frac{1}{2!}\theta^2\xi_1{}^2+\cdots\right)\times\text{Mean of }\left(1+\theta\xi_2{}^1+\cdots\right)\cdots$$

$$\equiv\left(1+\theta\xi_1^{(1)}+\frac{1}{2!}\theta^2\xi_1^{(2)}+\cdots\right)\left(1+\theta\xi_2^{(1)}+\cdots\right)\cdots$$

この兩邊を比較して $\frac{x^{(1)}}{1!}$, $\frac{x^{(2)}}{2!}$, $\cdots\frac{x^{(t)}}{t!}$ が ξ の冪平均で表し得る。即ちこの右邊は $\frac{x^{(t)}}{t!}$ の母函數 G である。

更にこれを變形して

$$G=e^{\log(1+\theta\xi_1^{(1)}+\cdots)+\log(1+\theta\xi_2^{(1)}+\cdots)+\cdots}$$

今各原素をその重心を原點として測ると、$\xi_1^{(1)}=\xi_2^{(1)}=\cdots=0$ であるから、指數の各項は

23) Edgeworth, ibid. p. 41. 彼はこれを基本原理とする。

$$\log\left(1+\theta\xi_q^{(1)}+\frac{1}{2!}\theta^2\xi_q^{(2)}+\cdots\right)=\log\left(1+\frac{1}{2!}\theta^2\xi_q^{(2)}+\frac{1}{3!}\theta^3\xi_q^{(3)}+\text{etc.}\right)$$

$$=\theta^2\frac{1}{2!}\xi_q^{(2)}+\theta^3\frac{1}{3!}\xi_q^{(3)}+\theta^4\left\{\frac{1}{4!}\xi_q^{(4)}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}(\xi_q^{(2)})^2\right\}+\cdots\equiv\frac{1}{2!}\varkappa_0\theta^2+\frac{1}{3!}\varkappa_1\theta^3+\frac{1}{4!}\varkappa_2\theta^4+\cdots$$

但し θ^2、θ^3、θ^4、… の係數を夫々 $\varkappa_0|2!$、$\varkappa_1|3!$、$\varkappa_2|4!$… で表はす。$\varkappa_0$、$\varkappa_1$、$\varkappa_2$ 等は $q=1,2,3\cdots m$ に對し互ひに相等しくはないが、公準第拾によつてその差はあまり大でない。次に $x^{(2)}(=\xi_1^{(2)}+\xi_2^{(2)}+\cdots+\xi_m^{(2)})$ を便宜上單位の大いさに取ると、任意の原素 ξ_q に對する $\varkappa_r$ は $\frac{1}{(\sqrt{m})^{r+2}}$ の位數を有する量となる。(註一) 今 $\Sigma\varkappa_r=k_r$ とすれば k_r は位數 $\frac{1}{(\sqrt{m})^r}$ の量となり、G は

$$\text{[II]}\qquad G=e^{\frac{1}{2!}k_0\theta^2+\frac{1}{3!}k_1\theta^3+\frac{1}{4!}k_2\theta^4+\cdots+\frac{1}{(t+2)!}k_t\theta^{t+2}}$$

こゝに G の展開に於て θ^t の係數は $x^{(t)}|t!$ を與へる。そして k_r は位數 $\frac{1}{(\sqrt{m})^r}$ の量であるから、すべての冪平均は遞減數列の各項に分解されることになる。即ち

$$\text{[III]}_a\quad\begin{cases}x^{(4)}=\frac{4!}{2!\,2^2}k_0^2, & +\quad k_2\,;\\ x^{(6)}=\frac{6!}{3!\,2^3}k_0^3, & +\frac{6!}{4!\,2!}k_0k_2+\frac{6!}{3!\,3!}\frac{k_1^2}{2!},\quad +k_4\,;\\ \vdots\qquad\quad\vdots & \qquad\vdots\\ x^{(2p)}=\frac{(2p)!}{p!\,2^p}k_0^p, & +\frac{(2p)!}{4!(p-2)!2^{p-2}}k_0^{p-2}k_2+\frac{(2p)!}{3!3!(p-3)!2^{p-3}}k_0^{p-3}\frac{k_1^2}{2!}+\frac{(2p)!}{6!(p-2)!2^{p-2}}k_0^{p-2}k_4+\cdots+\cdots\end{cases}$$

$$[\mathrm{III}]_b \begin{cases} x^{(5)}=\dfrac{5!}{3!\,2}k_0k_1, \quad +k_3\,; \\ x^{(7)}=\dfrac{7!}{3!\,2!\,2^2}k_0{}^2k_1, \ +\dfrac{7!}{5!\,2!}k_0k_3+\dfrac{7!}{3!\,4!}k_1k_2+\cdots, \ +\cdots \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ x^{(2p+1)}=\dfrac{(2p+1)!}{3!(p-1)!2^{p-1}}k_0{}^{p-1}k_1, \ +\dfrac{(2p+1)!}{5!(p-2)!2^{p-2}}k_0{}^{p-2}k_3+\cdots \end{cases}$$

$[\mathrm{III}]_a$ に於ては、第一群、第二群…は順次に位數 $\dfrac{1}{(\sqrt{m})}$、$\dfrac{1}{(\sqrt{m})^3}$ …… の量を表はし、$[\mathrm{III}]_b$ に於ては、順次に位數 $\dfrac{1}{(\sqrt{m})^2}$、$\dfrac{1}{(\sqrt{m})^4}\cdots$ の量を表はしてゐる。

次に右の關係から y の第一次近似として $y_0=\dfrac{1}{\sqrt{\pi 2k_0}}e^{-\frac{x^2}{k_0}}$ を得る。何故ならば $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2p}y_0dx=\frac{(2p)!}{p!\,2^p}k_0{}^p$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2p+1}y_0dx=0$ であつて ${}^{(t)}x$ の第一項（位數 $\dfrac{1}{\sqrt{m}}$ まで）を取れば、たしかに $[\mathrm{I}']$ を滿足するから。次に y の第二次近似としては $y_1=y_0,-k_1\dfrac{1}{3!}\dfrac{d^3y_0}{dx^3}$ で

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2p+1}y_1dx=\frac{(2p+1)!}{3!(p-1)!2^{p-1}}k_0{}^{p-1}k_1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty}x^{2p}y_1dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2p}y_0dx=\frac{(2p)!}{p!\,2^p}k_0{}^p$$

となる。即ち ${}^{(t)}x$ の第二次近似（位數 $\dfrac{1}{(\sqrt{m})^2}$ まで）を取つたこととなる。更に第三次近似 y_2 を得る。

$$y_2=y_0-k_1\frac{1}{3!}\frac{d^3y_0}{dx^3}, \ +k_2\frac{1}{4!}\frac{d^4y_0}{dx^4}+\frac{k_1{}^2}{2!}\frac{1}{3!\,3!}\frac{d^6y_0}{dx^6},$$

さて一般に y の第 t 次近似は如何なる形を有するかといふに、

$$[\mathrm{IV}]\qquad y_t=e^{-k_1\frac{1}{3!}\left(\frac{d}{dx}\right)^3+k_2\frac{1}{4!}\left(\frac{d}{dx}\right)^4-\cdots+(-1)^t k_t\frac{1}{(t+2)!}\left(\frac{d}{dx}\right)^{t+2}}\frac{1}{\sqrt{\pi 2k_0}}e^{-\frac{x^2}{2k_0}}$$

であつて、これは G に於てその指數から第一項 $\frac{1}{2}k_0\theta^2$ を取り除き、他の θ には operator $\left(-\frac{d}{dx}\right)$ を入れ、最後に operand $\frac{1}{\sqrt{\pi 2k_0}}e^{-\frac{x^2}{2k_0}}$ を附加した形である。そしてこの y_t を用ひると $\int_{-\infty}^{+\infty}x^s y_t dx$ は $x^{(s)}$ に於て、その第 t 次近似（位數 $\frac{1}{(\sqrt{m})^t}$ まで）を取つたことになる。（註二）更に y の近似 y_0、y_1、y_2… は、順次に次の式の展開に於ける ϕ の冪の係數として與へられる。

$$[\mathrm{IV}']\qquad e^{-\phi k_1\frac{1}{3!}\left(\frac{d}{dx}\right)^3+\phi^2 k_2\frac{1}{4!}\left(\frac{d}{dx}\right)^4+\cdots+(-1)^t\phi^t k_t\frac{1}{(t+2)!}\left(\frac{d}{dx}\right)^{t+2}}y_0,\quad\left(\text{但し、}y_0=\frac{1}{\sqrt{\pi 2k_0}}e^{-\frac{x^2}{2k_0}}\right)$$

この［IV］又は［IV′］が求める誤差法則であつて、その第一次近似 y_0 は所謂ガウスの正規法則に外ならない。

次に［IV］又は［IV′］に含まれてゐる常數 k_0、k_1、k_2 等の意味を考へよう。k_0 は $x^{(2)}$ 即ち複合量に對する偏差の二乘平均で、所謂標準偏差の平方に等しい。k_1、k_2、…k_t は現實軌跡の第二、第三…第 $(t+1)$ 次近似に對應してゐる遞減數列を作るが、k_1 は現實曲線に對する偏差三乘平均 $x^{(3)}$ と第一次近似が正確であるとしたときのその値 $\int_{-\infty}^{+\infty}x^3 y_0 dx$ との差をあらはし、k_2 は $x^{(4)}$ と第二次近似が正確であるとしたときのその値 $\int_{-\infty}^{+\infty}x^4 y_1 dx$ との差を現はしてゐる、以下同樣 k_t に到る。[24] こゝに t は原素の數に關係し、あまり大きな値を取り得ない。（註三）

即ち現實曲線の近似は第一次に於て最も有效に、第二・第三と進むに從ひその近似がにぶくなるのである。

（註一） κ_r が $\frac{1}{(\sqrt{m})^{r+2}}$ の位數を有し、從つて k_r が $\frac{1}{(\sqrt{m})^r}$ の位數の量なることを、彼は次の如くに證明する。[25]「公準第七により各原素の（値の）範圍は有限であるから、任意の第 q 番原素の逐次冪平均は $0, b_q\gamma_q^2, b_q'\gamma_q^3, b_q''\gamma_q^4\cdots$ と等置できよ

24) Edgeworth, ibid. p. 36 & p. 44.
25) Edgeworth, ibid. p. 42.

う。こゝに γ_q は定まつた媒介數 (parameter) で、b_q、b_q' 等は定まつた數係數である。各原素に對する係數 b_q は單位に等しと置いても一般性を失はないであらう。すると公準第十により、各原素に對する γ は殆んど相等しく、又相異なる原素に對する同冪の係數 b 即ち b''_q、b''_r 等は互ひに殆んど等しくなる。故に便宜上 $m\gamma^2$ が單位の位數の量とすると、諸 γ の平均値 γ は位數 $\frac{1}{\sqrt{m}}$ の量となり、任意の原素に對する第三、第四、第五等の冪平均は夫々 $\frac{1}{m^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{1}{m^{\frac{4}{2}}}$, $\frac{1}{m^{\frac{5}{2}}}$ … の位數を有つ。さて任意の、例へば第 q 番原素に對する任意の係數 κ_r は冪平均 $\overset{(2)}{\xi}_q$、$\overset{(3)}{\xi}_q$ 等の同次函數であるから、任意の原素に對する κ_r の位數は $\frac{1}{(\sqrt{m})^{r+2}}$ である。次に $\Sigma\kappa_r = k_r$ と置く、但し加法はすべての原素にわたる。さうすると k_r は位數 $\frac{1}{(\sqrt{m})^r}$ となる。」

(註二) $y_t = e^{-k_1\frac{1}{3!}\left(\frac{d}{dx}\right)^3 + k_2\frac{1}{4!}\left(\frac{d}{dx}\right)^4 - \cdots + (-1)^t k_t\frac{1}{(t+2)!}\left(\frac{d}{dx}\right)^{t+2}} \frac{1}{\sqrt{\pi 2k_0}} e^{-\frac{x^2}{2k_0}}$ が現實曲線 y の第 t 近似を與へることを彼は次の如くに證明する。[26]「この曲線から定まる t 乘平均即ち $\int_{-\infty}^{+\infty} x^t y_t dx$ は、母函數により定められる t 乘平均と、t 位の量のうちまでは相等しくなる。何故ならば前の如くに決定された(t) x の展開における任意の項を考へよう、今 t を偶數とすればその形は

$$t!\left(\frac{1}{(\alpha+2)!}\right)^a\left(\frac{1}{(\beta+2)!}\right)^b \cdots \frac{k_0{}^r}{2^r\, r!}\,\frac{k_\alpha{}^a}{a!}\,\frac{k_\beta{}^b}{b!}\cdots,$$

これを $t!\,Q\frac{k_0{}^r}{2^r\, r!}$ と置く，(但し $2r + a(\alpha+2) + b(\beta+2) + \cdots = t$)；これと同一の項が operator の展開によつて與へられる。即ち

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^t Q \frac{d^{t-2r}}{dx^{t-2r}} y_0 dx = \frac{t!}{2r!} Q \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2r} y_0 dx = t!\,Q\frac{k_0{}^r}{2^r\, r!}\cdots,$$

(但し $a(\alpha+2) + b(\beta+2) + \cdots = t - 2r$)

同樣の方法により、t が奇數のときも、y_t に對する兩式の項は一致する。」

(註三) t は原素 m に關してあまり大きな値を取り得ない。「母函數或はこれと同値の operator の展開により、作られる逐次の群の位數を考へる場合には、各群に入る項の數及び係數に影響を及ぼす $\frac{1}{t!}$ なる數係數に注意を拂はねばならぬ。[27]」

四　む す び

26) Edgeworth, ibid. p. 44.
27) Edgeworth, ibid. p. 44.

以上に於て私は、エッヂワースが誤差法則の數學的理論を如何に取扱つてゐるかにつき、若干の考察をなした。卽ち彼の所謂典型的な場合について、誤差法則の假說系の構成を吟味し、それより彼の創見にかゝる方法に從ひ誤差法則を導いたのである。

彼のこの理論に於ては三つの假定がなされてゐる。[28] 第一は誤差法則の出發點にある獨立原因の假說系であり、第二は曲線の近似と量の近似とに關するもので、ピアーソンの所謂モーメント法を用ひてゐる。第三は「二つの獨立な統計的量の積の算術平均は—若しその兩組が不變の條件の下に、無限に多くの度數を以て反覆されると假定するときは—それら各〻の算術平均の積に等しい」としたことである。かゝる假說を用ひて數學的に誤差法則が導かれたのであるが、この限りに於てはあくまで數學的理論に止まり、決して直ちに觀測法や集團的研究法の基礎理論とはならない。しかしながら彼がこれを研究したのは、單なる數學上の興味から出發したのではなく、集團的研究—「統計的研究」に於て作られる度數分布グラフに、適當な曲線をあてはめんとし、そのために數學的確率論を用ひて誤差法則—度數分布函數—を出したのである。そして從來ガウスの正規曲線に止つたに反し、更にラプラス、ケトレーの考へ方を展開して、第二次近似、第三次近似等の一般的誤差法則を導いた。しかも近似の度については明確にこれを規定して彼の理論を建設した。[29] この點は特に注目せらるべきであらう。

本稿に於ける私の意圖は、かかる觀測法及び統計的研究法にその適用地盤を期待せる、エッヂワースの誤差法則が、その理論に於て現實を如何に反映させてゐるかを吟味しつゝ、其の成果の一端を追跡することにあつた。

—一三・四・一四—

28) Journal of the Royal Statistical Society, Vol. 68. (1905) pp. 747–750. にこの論文の紹介がある。
29) Edgeworth, The Generalized Law of Error or Law of Great Numbers (Journal of the Royal Statistical Society, Vol. 79.) pp. 526–527. に於て彼は Charlier の理論と比較して論じてゐる。